**Chuyên đề: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Định nghĩa phép chia hết

Với  sao cho 

+) Nếu 

+) Nếu 

2. Một số tính chất: 

+) Nếu 

+) Nếu 

+) Nếu 

+) Nếu 

+) Nếu 

+) Nếu 

3. Một số định lý thường dùng

+) Nếu 

+) Nếu 

+) 

4. Một số hệ quả áp dụng

+) 

+)  và n chẵn 

+)  và n lẻ 

**B. Các dạng toán**

**Dạng 1:** Phương pháp tách lấy phần nguyên (biểu thị 1 ẩn theo ẩn còn lại)

\*) Phương pháp giải: Ta tách các biểu thức phân thức thành phần nguyên và phần phân, sau đó đánh giá phần phân để tìm ra các nghiệm của phương trình

Ta có  thì  ( là ước của )

Cách giải: Ta biến đổi 

**Bài 1:**

Giải phương trình nghiệm nguyên sau: 

**Lời giải**

Phương trình 



Vì 

Mà  là ước của 

Vì 

Thay vào phương trình và kết luận.

**Bài 2:**

Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Vì 

.

**Bài 3:** Chuyên  vòng 1, năm học 2014

a) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: 

b) Giải phương trình nghiệm nguyên sau: 

**Lời giải**

a) 

Vì  thuộc ước của .

Mà 

Thay vào phương trình và kết luận nghiệm.

b) Đặt 

phương trình  (phương trình câu )



+ Với 

**Bài 4:**

Giải phương trình nghiệm nguyên sau 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Vậy Ư

**Bài 5:**

Tìm tất cả các cặp số nguyên  sao cho 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Vì 





Mà 

Xét 3 trường hợp và kết luận được nghiệm 

**Bài 6:**

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Biểu thị  theo  ta có:

Dễ thấy  (vì  nguyên) do d dó: 

Để  thì phải có 

Ta có

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

**Bài 7:**

Tìm tất cả các cặp số nghiệm nguyên  thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Vì  nguyên nên  là ước của 

Vậy 

**Bài 8:**  Bình Định, năm học 

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Ta thấy  không phải là nghiệm của phương trình  nên 

Khi đó ta có: 

Do , mà 

Mà 

Từ đó ta có các cặp nghiệm cần tìm là: 

**Bài 9:** Chuyên Bình Định vòng 1, năm học 

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

**Nhận xét:**  không phải là nghiệm của 

Chia cả hai vế của  cho  ta có: 

Với  nguyên, suy ra  nguyên nên 

Thay  vào  ta có  là số nguyên khi 

Kiểm tra lại thấy  thỏa mãn và  thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên là  và .

**Bài 10:** Chuyên Bình Dương vòng 1, năm học 

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Do  là các số nguyên nên  phỉa chia hết cho  là ước số của  

Từ đó tìm được các giá trị nguyên của  là  các giá trị của  là: 

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là: 

**Bài 11:** Chuyên Phú Yên, năm học 

Tìm tất cả các cặp nghiệm nguyên  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Vì  nguyên nên  là ước của 3

Vậy 

**Bài 12:**  Quảng Nam, năm học 

Tìm tất cả các cặp nghiệm nguyên dương 

thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Đặt . Rõ ràng 

Từ đó ta có: . Do  nên  nhận giá trị là 

Thực tế chỉ có  thỏa mãn, khi đó 

Từ đó suy ra 

Xét tất cả các trường hợp ta có nghiệm nguyên dương  của phương trình là: 

**Bài 13:**  Bến Tre, năm học 

Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau 

**Lời giải**

Ta nhận thấy ở phương trình trên  có bậc cao nhất bằng 1. Nên có thể rút  và tách giá trị nguyên của phương trình

Thật vậy: Ta có 

Ta có:  không phải là nghiệm của phương trình, do đó: 

Phương trình  có nghiệm nguyên khi  hay  là ước của 5

Ta xét các trường hợp và tìm được nghiệm của phương trình: 

**\*) Nhận xét:** Với những phương trình bậc hai, có một ẩn nào đó chỉ xuất hiện bậc nhất. Ta rút ẩn đó ra từ phương trình rồi tách giá trị nguyên

**Bài 14:**  Quảng Bình, năm học 

Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có: 

Vì  không thỏa mãn phương trình nên 

Ta thấy  là số nguyên nên  là ước của  hay 

Từ đó ta có nghiệm nguyên của phương trình là: 

**Bài 15:**  Tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 

Tìm tất cả các cặp nghiệm nguyên dương  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Mà  nguyên nên ta có:  nguyên hay  cũng nguyên

Ta lại có: 

Vì  nguyên dương nên ta có  và 

Xét các trường hợp ta được nghiệm của phương trình là: 

**Bài 16:** Chuyên Tin Phú Thọ, năm học 

Tìm tất cả các cặp nghiệm nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Mà  nguyên nên  (vì  và  nguyên tố cùng nhau và 

Vậy 

**Bài 17:** Chuyên Toán Hòa Bình, năm học 

Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có:  (vì  không là nghiệm)

Nên lúc này ta có 

Vì vậy  nguyên khi 

Xét các trường hợp và tìm được nghiệm của phương trình 

**Bài 18:**  Vũng Tàu, năm học 

Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Để có  nguyên thì 

Xét các trường hợp và tìm được nghiệm của phương trình 

**Bài 19:**  Hà Giang, năm học 

Tìm các số nguyên dương  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Do  nguyên dương 

Vì , mà  và 

Nếu 

Nếu 

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là:  và 

**Bài 20:** Chuyên Bình Định, năm học 

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Xét các trường hợp và tìm được nghiệm của phương trình là: 

**Bài 21:** Chuyên Toán Phú Thọ, năm học 

Tìm các số nguyên  thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có: 

Để  nguyên thì  (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: 

**Bài 22:** Chuyên yên Bái, năm học 

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

 chia hết cho 



Từ . Ta có bảng sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 |
|  | -5 | -3 | -2 | 0 | 1 | 3 |
|  |  | 5 |  | -1 |  | 2 |
| Kết Luận | Loại | Thỏa mãn | Loại | Thỏa mãn | Loại | Thỏa mãn |

Với  không có nghiệm 

Với  và 

Với  và 

Kết luận: Vậy phương trình có  nghiệm nguyên: 

**Bài 23:** Chuyên yên Bái, năm học 

Tìm các số nguyên  thỏa mãn phương trình: 

**Lời giải**

Phương trình đã cho 

Ta thấy  không thỏa mãn phương trình  nên 

Để cho  thì trước tiên phải có 

Thay  vừa tìm được vào  ta được số nguyên 

Vậy các số nguyên  phải tìm là: 

**Bài 24:**  Thanh Hóa, năm học 

Tìm các số nguyên  thỏa mãn phương trình: 

**Lời giải**

**Cách 1:** Phương trình đã cho tương đương với 

Xét từng trường hợp và tìm được nghiệm của phương trình 

**Cách 2:** Phương trình đã cho tương đương với 

Xét từng trường hợp và tìm được nghiệm của phương trình 

**Bài 25:** Tuyển sinh vào  ĐHQGHN

Tìm  thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có: 

+)  không phải là nghiệm của phương trình

+) 

**Bài 26:**  Chương mỹ, năm học 

Tìm các số nguyên dương  thỏa mãn: 

**Lời giải**

(Do  nguyên dương nên 

Mà  và  là nguyên tố cùng nhau nên  chia hết cho 

 hoặc  (vì 





Với 

Với 

**Bài 27:**  Cẩm Thủy, năm học 

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

+ Vì  nên 



Bảng giá trị nguyên tương ứng:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | | 1 | -2 | 2 | | -4 | 4 |
|  | 0 | 2 | loại | 1 | -1 | 3 | Loại | Loại |
|  | 1 | -7 |  | -1 | -1 | 7 |  |  |

Vậy 

**Bài 28:**  Bà Rịa Vũng Tàu, năm học 

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  thỏa mãn phương trình .

**Lời giải**

Từ    (\*)

Vì  nên .

Khi đó  hay 

Mà  nguyên dương nên .

Thay lần lượt  vào (\*) thì khi  tìm được  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 29:**  Lục Nam, năm học 

Tìm các số nguyên  thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có: 

 nguyên  nguyên 

 (do )

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 9 | 27 |
|  | ± 1 | (loại) | ± 5 |

Với  (loại)

Với 

Với 

Với  (loại)

Vậy 

**Bài 30:**  Nghi Lộc, năm học 

Tìm các số nguyên  thoả mãn .

**Lời giải**

Ta có:

 (vì )





Do 



**Bài 31:**  Thanh Chì, năm học 

Tìm  nguyên dương thỏa mãn: .

**Lời giải**

Đặt 

 (1)

Đặt 

(1)

 (2)

Vì 



Ta có: 





 (Loại) ; ;  (Loại);  (Loại);



Không có giá trị nào của x thỏa mãn.

**Bài 32:**  Yên Dũng, năm học 

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có 

Ta thấy 

hay 

 27 , mà  nên 

Xét các trường hợp ta được các cặp số nguyên thỏa mãn là và .

**Dạng 2: Đưa về phương trình ước số (phương trình tích)**

\*) Ta gọi phương trình ước số là phương trình có vế trái là một tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là một hằng số nguyên. Bằng cách tìm ước số của hằng số nguyên đó, ta tìm được nghiệm nguyên của phương trình đã cho

+ Nếu  ( là ước của )

\*) Một số dạng cơ bản: 



Nếu  thì 

**Cơ sở:** Thường sử dụng với các phương trình có các biểu thức chứa ẩn phân tích được thành nhân tử

- Phương pháp: Biến đổi phương trình về dạng một vế là tích của các đa thức chứa ẩn, vế còn lại là tích của các số nguyên (số nhân tử của hai vế bằng nhau)

 giải các phương trình tương ứng



**Bài 1:**

Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có phương trình 

Ta xét 6 trường hợp:

+ TH1:  (thỏa mãn)

Các trường hợp còn lại tương tự.

**Bài 2: Ams 2014**

Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Hướng dẫn giải**

 (1)

Lại có 

 (\*)

Ư(5)  (2)

Từ (1)(2) , thay vào (\*)

+ Với  (thỏa mãn).

**Bài 1:**

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Ta gọi phương trình trên là phương trình ước số: Vế trái là tích các thừa số nguyên, vế phải là một hằng số. Ta có x và y là các số nguyên nên x – 1 và y – 1 là các số nguyên và là ước của 23

Do vai trò của x và y là như nhau, giả sử . Khi đó 

Ta có:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Nghiệm nguyên của phương trình 

**Bài 2:**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Phương trình đã cho có thể đưa về dạng  (1)

Từ (1) ta suy ra  là ước của 10 hay 

Từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình là:



**Bài 3:**

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình  (1)

**Hướng dẫn giải**

Cách 1: Đưa về phương trình ước số

Ta có 

Ta có các nhận xét sau:

a) Vì có chứa y với số mũ chẵn nên có thể giả thiết rằng 

b)  và  cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng chẵn

Với các nhận xét trên ta có hai trường hợp:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Do đó:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Đáp số 

Cách 2: Viết phương trình thành bậc hai đối với  là  (2)



Điều kiện cần để phương trình (2) có nghiệm nguyên là  là số chính phương 



Giả sử  thì  và 

Có  nên  và  cùng tính chẵn lẻ và phải cùng chẵn

Từ các nhận xét trên ta có . Do đó 

Thay vào (2): 

Ta có bốn nghiệm 

**Bài 4:**

Xác định tất cả các cặp số nguyên không âm  sao cho 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 



Khi đó ta thu được hai hệ sau  hoặc 

**Bài 5:**

Giải phương trình nghiệm nguyên sau 

**Hướng dẫn giải**

**Bài 6: Chuyên KHTN 2012**

Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn đẳng thức 

**Hướng dẫn giải**

**Bài 7:**

Tìm nguyên nguyên dương của phương trình sau 

**Hướng dẫn giải**

**Bài 8:**

Tìm  nguyên thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

**Bài 9:**

Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

**Bài 10:**

Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình 

**Hướng dẫn giải**

**Bài 2: Chuyên**  **vòng 1, năm 2015**

Tìm  để  và  đều là các số chính phương 

**Hướng dẫn giải**

Đặt 

Ta có nhận xét sau: 

+) 

+) 

**Bài 3: Chuyên**  **vòng 1, năm 2015**

Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình:

a) 

b) 

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: 

Nhận xét: 

Lại có: 

 và kết luận bài toán.

b) 

+) Nếu  là số lẻ 

Có 





Mà: 

**Bài 4:** Chuyên Hà Nội, năm học 

Tìm các cặp số tự nhiên  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Mà 

Nếu  lẻ, đặt  (sai)

 lẻ (loại)

Nếu  chẵn, đặt  (đúng)

Do đó khi  chẵn thì:



Vì 

Vậy ta có các trường hợp:

-  (loại)

-  (loại)

**Bài 5:** Chuyên , năm học 

Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn đẳng thức sau: 

**Lời giải**

Ta có: 

Đặt  và 

Vì  nguyên tố nên ta có  trường hợp 

 nên  chia  dư  (loại)

Vì , mà  và 

Vậy  số nguyên dương  trong đó  thay vào  ta có: 

Vì , ta có các trường hợp

- TH1:  (loại)

- TH2:  (loại)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: 

**Bài 1:** Chuyên Thái Nguyên, năm học 2016 - 2017

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Không mất tính tổng quát ta giả sử 

Xét các trường hợp và tìm được nghiệm nguyên của phương trình là: 

**Bài 2:** Chuyên Quảng Ngãi, năm học 2015 - 2016

Tìm các số nguyên  biết rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 

Do 

Vì  lẻ nên 

**Bài 3 (khó):** HSG TPHCM, năm học 2016 - 2017

Tìm  nguyên thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Xét từng trường hợp và kết luận được nghiệm của phương trình: 

**Bài 4:** HSG Vũng Tàu, năm học 2015 - 2016

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Xét các trường hợp và để ý rằng  là số lẻ

Từ đó tìm được nghiệm nguyên của phương trình: 

**Bài 5:** Chuyên Đồng Nai, năm học 2017 - 2018

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Xét các trường hợp và nhận thấy phương trình không có nghiệm nguyên

Vậy phương trình vô nghiệm

**Bài 6:** HSG Thừa Thiên Huế, năm học 2016 - 2017

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Xét các trường hợp và tìm được nghiệm nguyên của phương trình là: 

**Bài 7:** HSG Bình Phước, năm học 2016 - 2017

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 



Xét 4 trường hợp và kết luận phương trình vô nghiệm.

**Bài 8:** HSG Tây Ninh, năm học 2016 - 2017

Tìm tất cả các cặp số nguyên  thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có: 

Do  nguyên  nguyên

Mà 

Vậy nghiệm nguyên dương  của phương trình là: 

**Bài 9:** HSG Tỉnh Lai Châu, năm học 2016 - 2017

Tìm các số nguyên  thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có: 



Vậy nghiệm của phương trình là: 

**Bài 10:** HSG Lai Châu, năm học 2016 - 2017

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 







Với  nguyên thì  là số lẻ và 

Mà 

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình: 

**Bài 11:** Chuyên Hưng Yên, năm học 2016 - 2017

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương  của phương trình: 

Thỏa mãn 

**Lời giải**

Ta có: 

Vì 

Từ 

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là: 

**Bài 12:** Chuyên Toán Phú Thọ, năm học 2016 - 2017

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 



\*)Nhận xét:

+) 

+)  là số chẵn và  là số lẻ

+) 

Từ các nhận xét trên ta có các trường hợp sau

 hoặc 

- TH1:  (vô nghiệm)

- TH1: 

Vậy có hai bộ số  thỏa mãn bài toán: 

**Bài 13:** HSG Hải Dương, năm học 2016 - 2017

Tìm các số nguyên  thỏa mãn: 

**Lời giải**

Ta có: 

Ta xét 4 trường hợp và tìm được nghiệm của phương trình là: 

**Bài 14:**

Giải phương trình nghiệm nguyên sau: 

**Lời giải**

Ta có: 

 trường hợp



Vậy phương trình có nghiệm nguyên là: 

**Bài 15:**

Tìm , thỏa mãn 

**Lời giải**



+) 

+) 

Vậy nghiệm của phương trình là: 

**Bài 16:** Giải các phương trình nghiệm nguyên

a)  b) 

c)  d) 

e) 

**Lời giải**

a) ta có: 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 1 | - 1 | - 2 |
|  | 1 | 2 | - 2 | - 1 |
|  | 0 |  | - 1 |  |
|  | 1 |  | 0 |  |

Vậy 

b) 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 7 | 1 | - 1 | - 7 |
|  | 1 | 7 | - 7 | - 1 |
|  | 3 |  |  | - 3 |
|  | -1 |  |  | 7 |

c) 



+) 

+) 

d) Ta có:



 trường hợp

e) 



**Bài 17:**

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 

Do  nguyên dương 

Mà:  nên ta có các trường hợp sau:

+)  +) 

Vậy: 

**Bài 18:**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 



**Bài 19:**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 





Có:  và có cùng tính chẵn lẻ nên chúng cùng phải chẵn vì 12 chẵn

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | -2 | 6 | -6 |
|  | 6 | -6 | 2 | -2 |

**Bài 20:**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: 

**Lời giải**

Ta có: 



Đặt 

**Bài 21:**

Tìm tất cả các số nguyên  sao cho

a)  là số chính phương

b)  là số chính phương

c)  là số chính phương

**Lời giải**

a. Theo giả thiết:



Vì 

+) TH1: 

+) TH2: 

b) 

 

c) 



Sau đó xét các trường hợp và vô nghiệm

**Cách khác:**

Ta có: 

+) Nếu  lẻ  lẻ  tích là lẻ nên loại

+) Nếu  chẵn  chẵn  tích chia hết cho 4, mà 6 không chia hết cho 4 nên cũng loại.

Vậy không tồn tại 

**Bài 22:**

Tìm các số nguyên  sao cho:  là số chính phương

**Lời giải**

Theo giả thiết





Ta có:  các trường hợp

+) 1 và 49 

+) 7 và 7 

+) -7 và -7 

+) - 49 và – 1 

Vậy 

**Bài 23:**

Giải phương trình nghiệm nguyên

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Ta có: 



Lại có: 

+) 

+) 

Vậy phương trình có 4 nghiệm

b) Ta có: 

**Bài 24:** HSG Như Xuân, năm học 2020 - 2021

Tìm các nghiệm nguyên dương  của phương trình 

**Lời giải**

Ta có: 

Vì  nên 

Từ  suy ra

Hoặc 

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương là: 

**Bài 25:** HSG Diễn Châu, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình nghiệm nguyên: 

**Lời giải**

Ta có 











Vì  nguyên nên ta có bảng sau

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Vậy 

**Bài 26:** HSG Cẩm Xuyên, năm học 2020 - 2021

Tìm các cặp số nguyên  thỏa mãn phương trình .

**Lời giải**

Ta có 

Vì nên là số chính phương

Mà  là tích hai số nguyên liên tiếp

Do đó để thì 

Với 

Với 

Với 

Vậy các cặp số nguyên  thỏa mãn phương trình  là .

**Bài 27:** HSG Nghi Lộc, năm học 2017 - 2018

Tìm nghiệm là các số tự nhiên của phương trình 

**Lời giải**

Ta có 

Vì  nên 

Để 

Khi  thì  hay ; .

Khi  thì  hay ; .

Vậy cặp nghiệm của phương trình là ; .

**Bài 28:** HSG Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu, năm học 2020 - 2021

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  thỏa mãn điều kiện: 

**Lời giải**



Giả sử tồn tại  thỏa mãn đề bài.

Ta có: 



Vì  nên 

Suy ra  là ước của 

; Mà 

Nếu , thay vào  ta được: (thỏa mãn)

Nếu thay vào ta được: (Chọn)

Vậy  là các cặp giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Bài 29:** HSG Ba Vì, năm học 2018 - 2019

Tìm các giá trị  nguyên dương thỏa mãn 

**Lời giải**







 hoặc ( vì  nguyên dương nên )

 hoặc 

Vậy  hoặc  thì 

**Bài 30:** HSG Hà Đông, năm học 2020 - 2021

Tìm các cặp số nguyên  thoả mãn: 

**Lời giải**

Ta có 



Vì nên  ta xét các trường hợp sau:

TH1: 

TH2: 

Vậy hệ phương trình có nghiệm .